Análisis no lineal - Práctica 1 (primera parte)

1 Shooting 1-dimensional

1. Probar que la ecuación del péndulo forzado con fricción
$$u''(t) + au'(t) + b\sin(u(t)) = p(t) \tag{1}$$
con $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua admite al menos una solución para las condiciones de Dirichlet
$$u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1.$$
¿Vale un resultado análogo para las condiciones periódicas
$$u(0) = u(1), \qquad u'(0) = u'(1)?$$

2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y acotada tal que
$$g(0) = 0, \qquad [(2k-1)\pi]^2 < g'(0) < [2k\pi]^2$$
para cierto entero k. Probar que el problema de Dirichlet
$$u''(t) + g(u(t)) = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0$$
tiene al menos dos soluciones además de la trivial $u \equiv 0$.

   Sugerencia: considerar la función diferenciable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(\lambda) = u_\lambda(1)$, entonces $\phi(0) = 0$ y $\phi(-\lambda) < 0 < \phi(\lambda)$ para $\lambda > \|g\|_\infty$. Luego probar que $\phi'(0) = w_0(1)$, donde w_0 es la única solución del problema lineal
$$\begin{cases} w_0''(t) + g'(0)w_0(t) = 0 \\ w_0(0) = 0, \quad w_0'(0) = 1 \end{cases}$$
y ver que $\phi'(0) < 0$.

3. *Super y subsoluciones estrictas*: Sea $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y localmente Lischitz en u y sean $\alpha \le \beta$ suaves tales que
$$\alpha''(t) > f(t, \alpha(t)), \qquad \beta''(t) < f(t, \beta(t)),$$
$$\alpha(0), \alpha(T) \le 0 \le \beta(0), \beta(T).$$
Probar que el problema de Dirichlet
$$u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0$$
admite al menos una solución u con $\alpha \le u \le \beta$. El caso particular $\alpha \equiv -R$ y $\beta \equiv R$ corresponde a la condición de Hartman.

2 Operador de Poincaré

1. Probar que el dominio del operador de Poincaré es abierto.

2. Considerar el problema

$$u'(t) = \operatorname{sen}(u(t)) + p(t)$$

con p una función T-periódica de promedio 0. Probar:

(a) Si u es una solución T-periódica, entonces $u + 2k\pi$ también (se dice que son soluciones 'geométricamente equivalentes).

(b) Si u es una solución T-periódica, entonces $\|u'\|_{L^2} \leq \|p\|_{L^2}$. Deducir que $\|u - \overline{u}\|_\infty \leq c\|p\|_{L^2}$.

(c) Si $c\|p\|_{L^2} \leq \frac{\pi}{2}$, entonces el problema tiene al menos dos soluciones T-periódicas geométricamente distintas. *Sugerencia*: encontrar una solución u tal que $|\overline{u}| \leq \frac{\pi}{2}$ y otra tal que $\frac{\pi}{2} \leq \overline{u} \leq \frac{3\pi}{2}$.

(d) Para p fija (T-periódica, de promedio 0) , probar que si $k > 0$ es suficientemente chico, entonces el problema

$$u'(t) = \operatorname{sen}(ku(t)) + p(t)$$

tiene al menos dos soluciones T-periódicas geométricamente distintas.

(e) Probar que el problema

$$u'(t) = \operatorname{sen}(\sqrt[3]{u(t)}) + p(t)$$

con p T-periódica, de promedio 0 tiene infinitas soluciones T-periódicas.